

Utilizzare rappresentazioni visuo-spaziali per potenziare il ragionamento in aritmetica e in algebra

Anna Baccaglioni-Frank
Università di Pisa

Varese, Febbraio 2018



“rappresentazione visuo-spaziale”

Per oggi intendo:

una qualsiasi rappresentazione di oggetto o processo matematico,

- (se ‘esterna’) accessibile per mezzo della vista ed eventualmente di altri sensi,
- oppure (se ‘interna’) una «visione» descrivibile con parole, gesti, segni grafici o oggetti nello spazio (e nel tempo)

“ragionamento matematico”

“Writing about reasoning in mathematics is complicated by the fact that the term reasoning, like understanding, is widely used with the implicit assumption that there is universal agreement on its meaning.”

(Yackel & Hanna, 2003)

“Scrivere di ragionamento matematico è complicato dal fatto che il termine ragionamento, come comprensione, è usato ampiamente assumendo implicitamente che ci sia un accordo universale sul suo significato.”

“ragionamento matematico”

“...denotes the distinctively mathematical methodology of axiomatic reasoning, logical deduction, and formal inference.

Other times it signals a much broader quantitative and geometric craft that blends analysis and intuition with reasoning and inference, both rigorous and suggestive.

This ambiguity confounds any analysis and leaves room for many questions.”

(Steen, 1999)

“ragionamento matematico”

Per oggi intendo:

processo di pensiero (ed eventualmente azione)
mirato a rispondere ad una domanda (posta da
altri o da se stessi) in un contesto matematico.



rappresentazioni

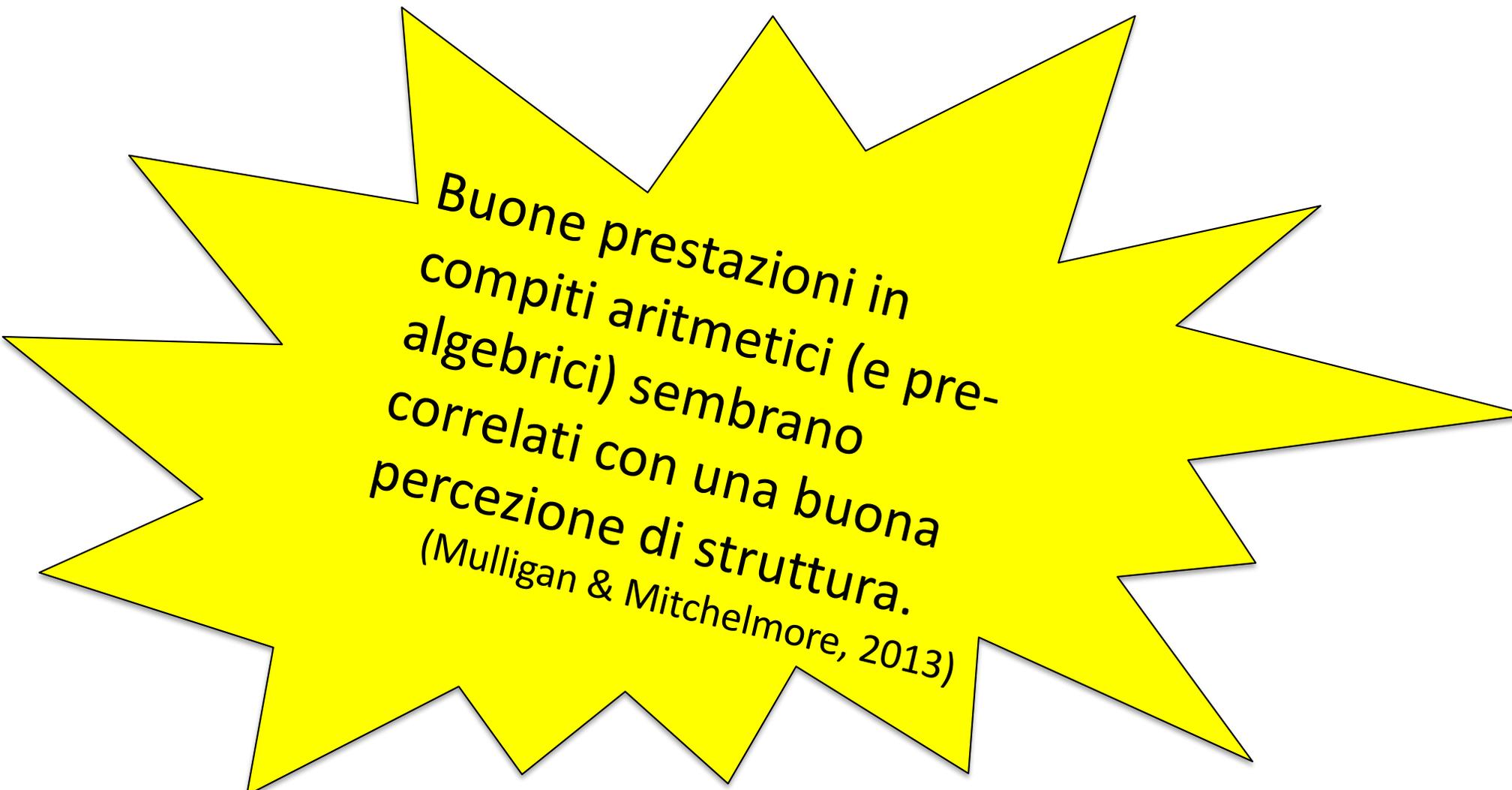
L'importanza di «aspetti» visuo-spaziali
nel ragionamento matematico
in ambito aritmetico e algebrico

Il ruolo chiave della percezione di “Pattern & Structure” (regolarità e struttura)

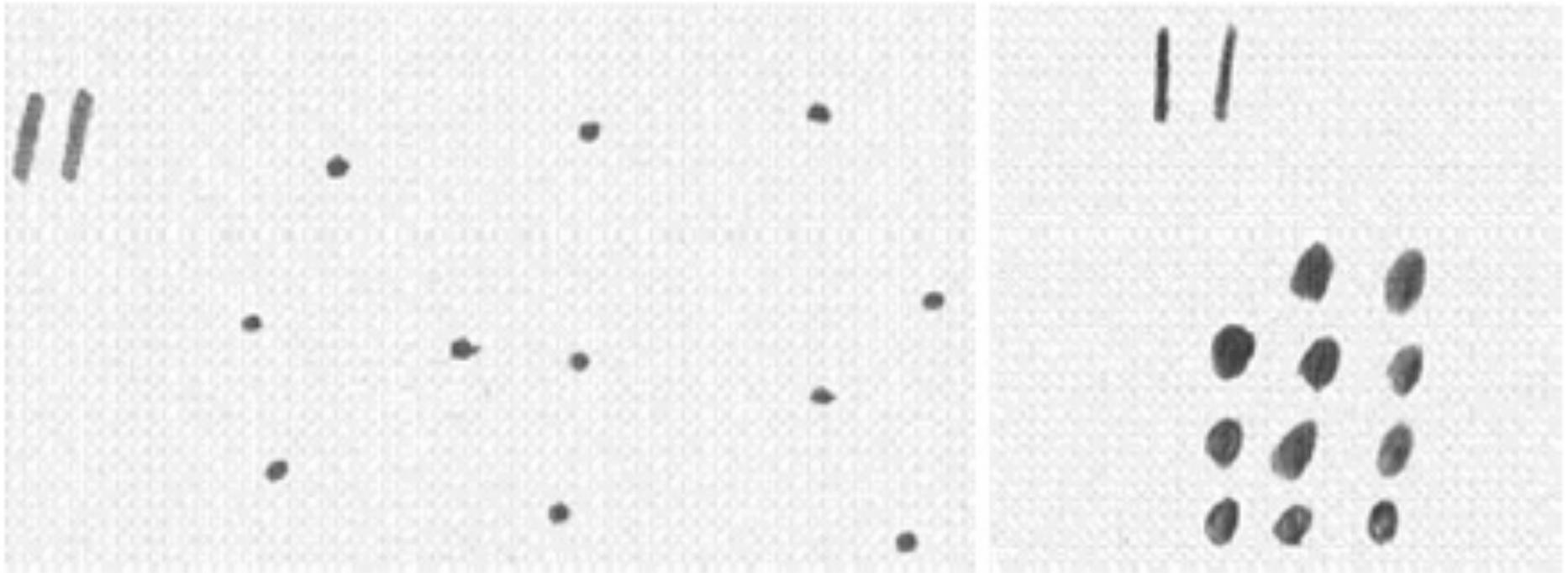
Un gruppo di ricercatori australiani ha trovato che bambini con rendimento persistentemente basso in matematica sono messi in difficoltà da richieste che coinvolgono la percezione di

- “pattern” matematici (regolarità che possono essere oggetto di previsioni/anticipazioni e che hanno a che fare, in genere, con relazioni numeriche, spaziali o logiche)
- e “struttura” (il modo in cui un pattern è organizzato).

(Mulligan, 2011)



Buone prestazioni in
compiti aritmetici (e pre-
algebrici) sembrano
correlati con una buona
percezione di struttura.
(Mulligan & Mitchelmore, 2013)



(Mulligan & Mitchelmore, 2013)



Fig. 3 Prestructural representations of a clock face (drawn from memory by Grade 1 students)

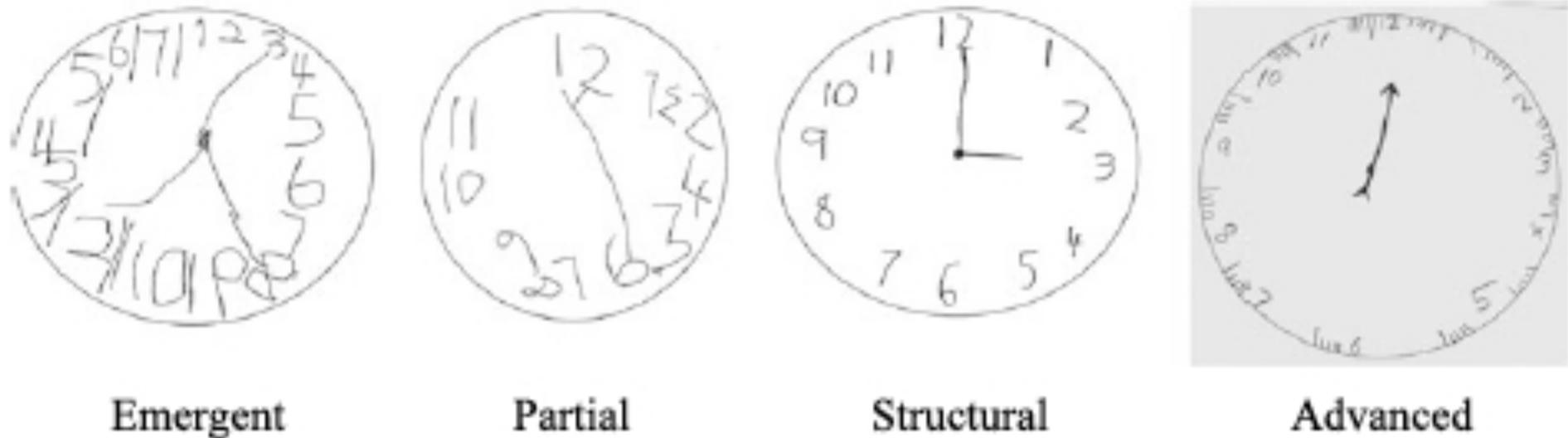


Fig. 4 Structural development in depictions of a clock face

(Mulligan & Mitchelmore, 2013)



A Grade 1 students' three attempts to complete a rectangular grid

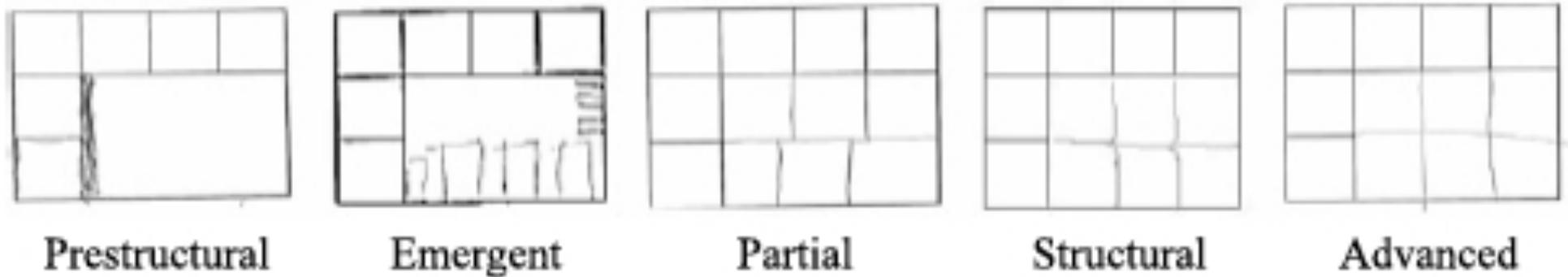


Fig. 5 Structural development in grid completion task

(Mulligan & Mitchelmore, 2013)

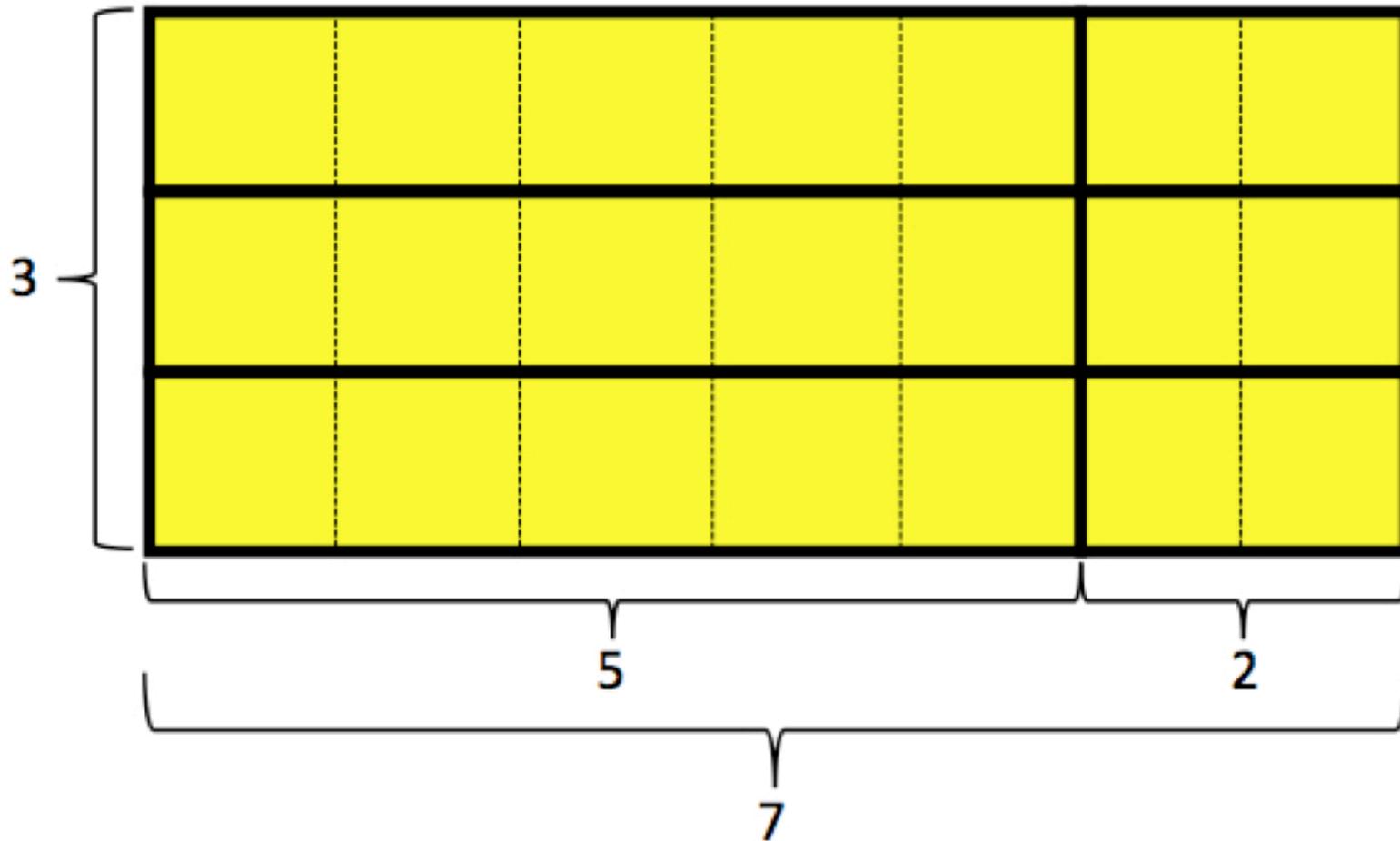
Che cosa possiamo fare come educatori?

Proporre attività nell'ambito dei numeri che

- richiedono di interpretare ed elaborare rappresentazioni geometriche di numeri,
- promuovono un uso consapevole e flessibile dei simboli numerici (per es., calcolo a mente),
- favoriscono la “visualizzazione” di proprietà di numeri o di altri oggetti matematici,
- portano a *generalizzare* (per es., “questo vale *per ogni* numero”).

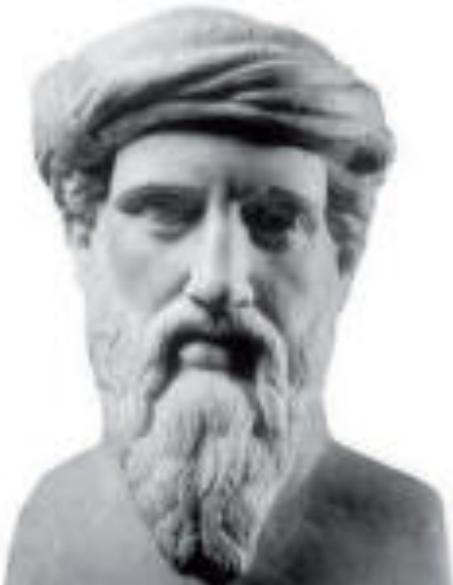
Già in II elementare si può chiedere:

Come potresti usare questa figura per scoprire quando fa 7×3 (senza contare i quadretti)?



Una piccola nota storica sull'uso dei rettangoli per rappresentare aree

Lo numero che è contenuto da due lati è detto numero superficiale



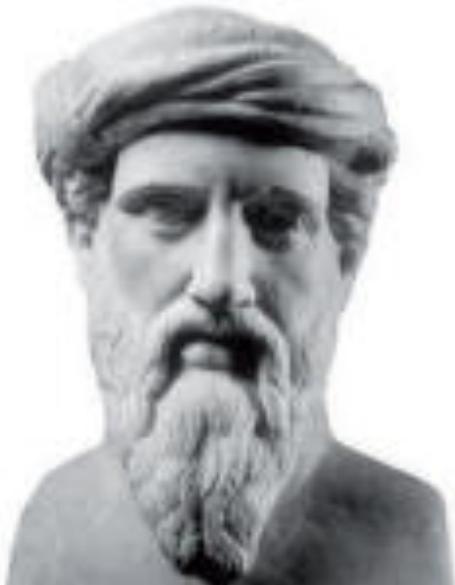
Pitagora



Euclide

I rettangoli come modello per la moltiplicazione

Qualora siano due rette, e l'una o l'altra di esse sia secata in quanti mai si voglia segmenti, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale ai rettangoli compresi dalla retta non secata e da ciascuno dei segmenti.

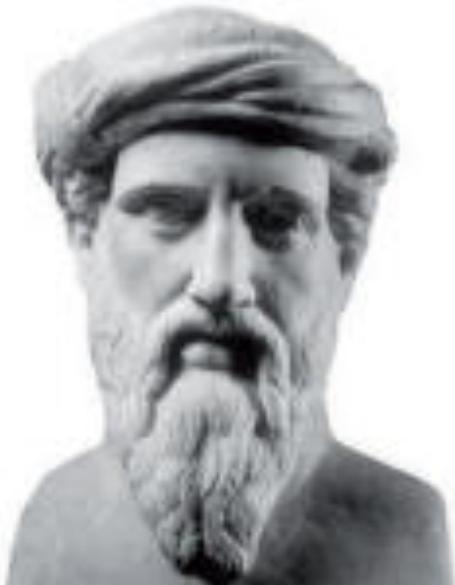
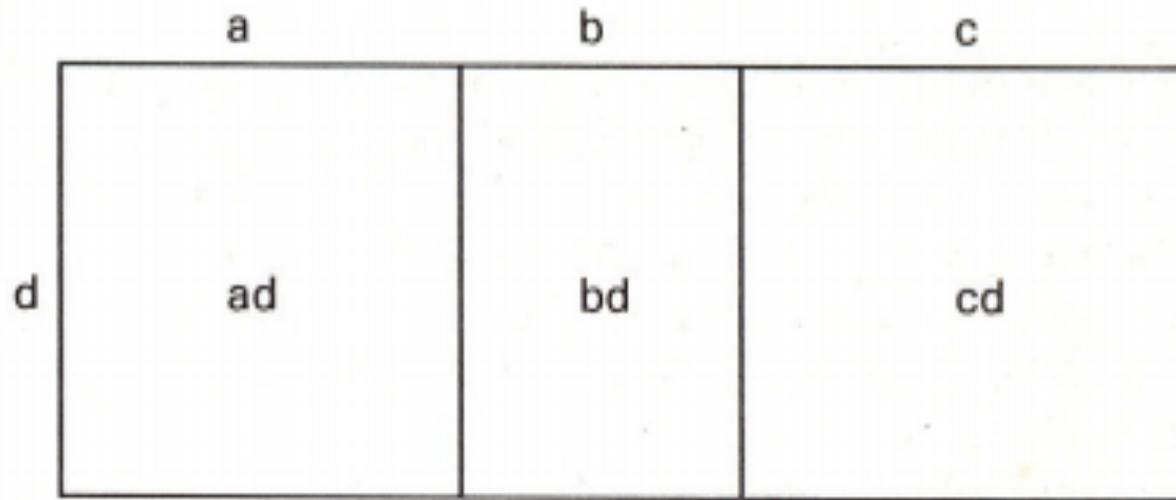


Pitagora



Euclide

I rettangoli come modello per la moltiplicazione



Pitagora

Proprietà distributiva: $(a+b+c)d = ad+bd+cd$



Euclide

Dati di uno studio longitudinale

(Baccaglini-Frank & Bartolini, 2016)

Percentuali di bambini “a rischio”

o con diagnosi (in classe terza) di discalculia pura o in comorbidità

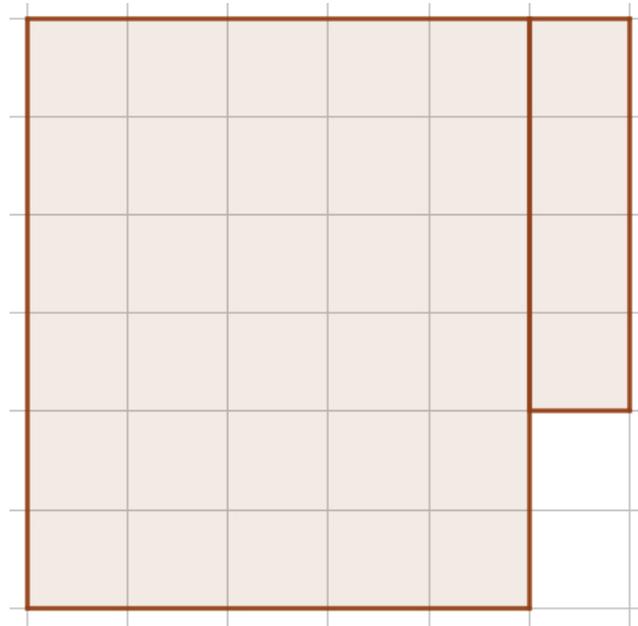
anno di entrata nel progetto	Classi Sperimentali	Classi di Controllo
Primo Anno (2011)	4%	7%
Secondo Anno (2012)	2%	9%
nel calcolo:	<ul style="list-style-type: none">• varietà nelle strategie• elevata accuratezza (da subito)• nessun bambino non risponde• tempi più lunghi (di ca 3 m) di automatizzazione dei fatti	<ul style="list-style-type: none">• strategie “standardizzate”• accuratezza minore• vari bambini non rispondono

Quali numeri sono risultato di un'espressione
ottenuta usando ciascuno dei numeri e dei
simboli seguenti una e una sola volta?

4 5 6 + × ()

usare le parentesi se necessario

Si può rappresentare l'espressione $5 \times 6 + 4$ per via geometrica nel modo seguente, su carta a quadretti.



Il risultato dell'espressione corrisponde al numero dei quadretti, cioè all'*area* della figura disegnata.

Anche le altre espressioni si possono rappresentare in modo analogo per via geometrica. Come si può fare?

Scrivere almeno tre espressioni diverse il cui risultato sia 16.

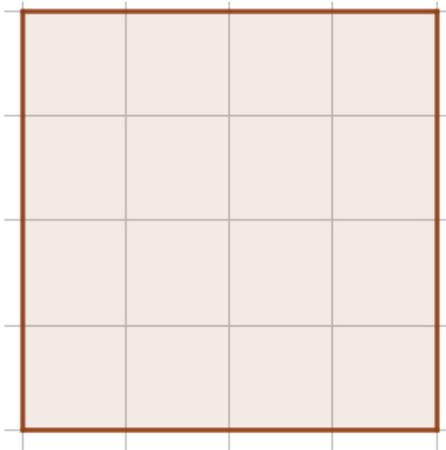
Poi cercare una rappresentazione geometrica per ciascuna espressione.

Scrivere almeno tre espressioni diverse il cui risultato sia 16.

Poi cercare una rappresentazione geometrica per ciascuna espressione.

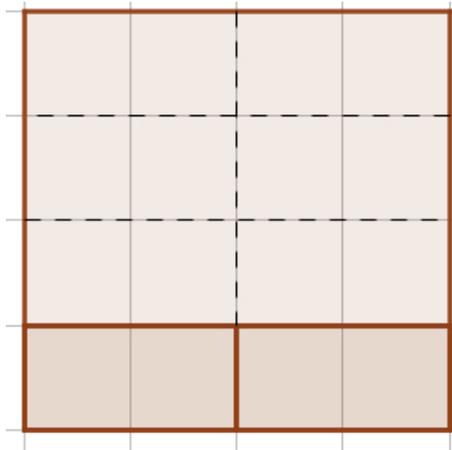
Per esempio:

$$4 \times 4 = 16$$



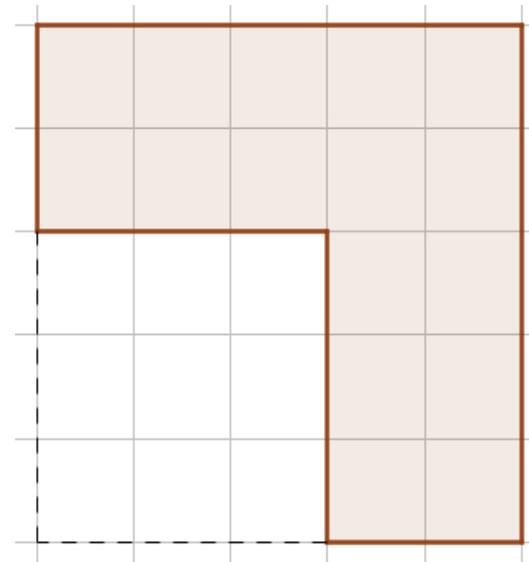
“Il quadrato di 4”

$$(2 + 2) \times 4 = 16$$



“Il doppio di 2 per 4 volte”

$$(5 \times 5) - (3 \times 3) = 16$$



“Il quadrato di 5 diminuito del quadrato di 3”

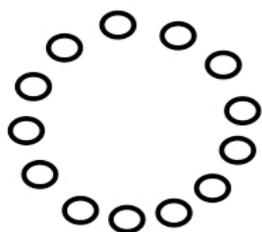
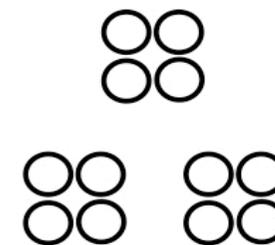
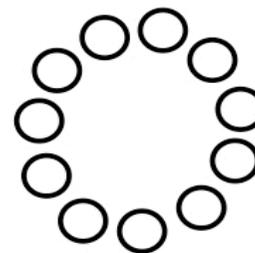
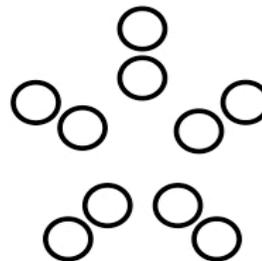
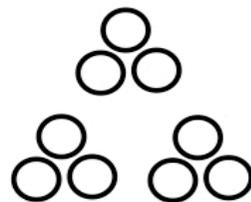
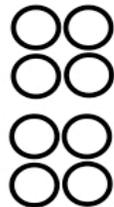
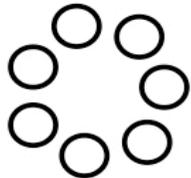
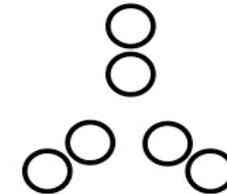
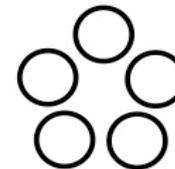
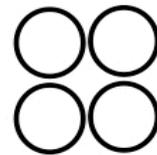
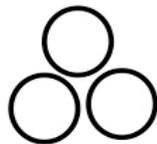
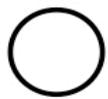
Un altro modo di rappresentare i numeri visivamente

Scrivi il numero rappresentato da ciascuna figura.

Descrivi come la percepisci.

Quali regolarità riesci a scoprire?

Come continueresti a rappresentare altri numeri?



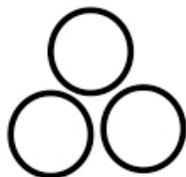
1



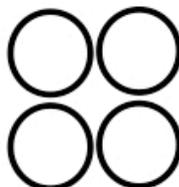
2



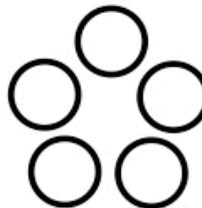
3



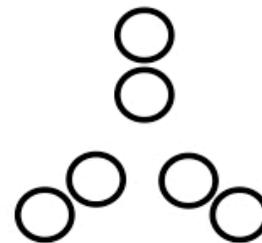
4



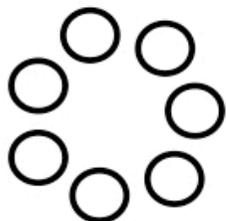
5



6



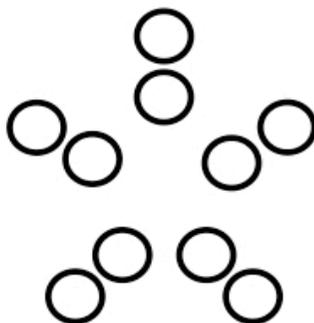
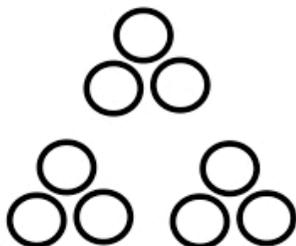
7



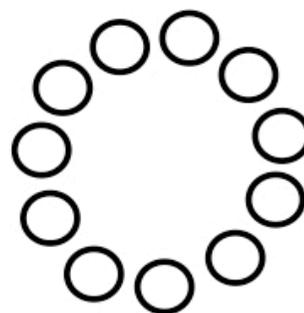
8



9

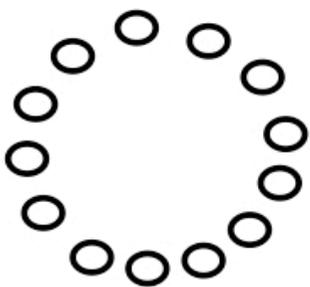
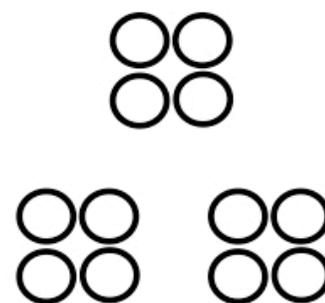


10



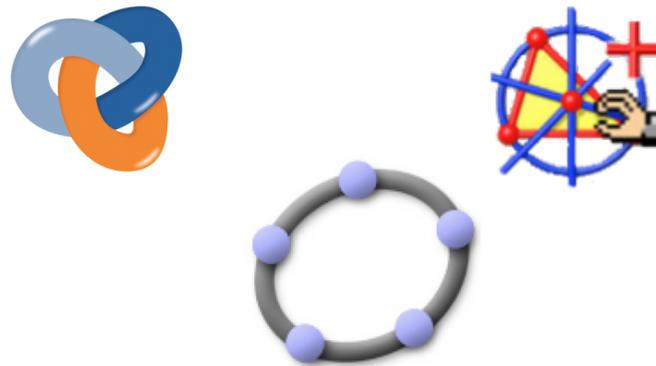
11

12

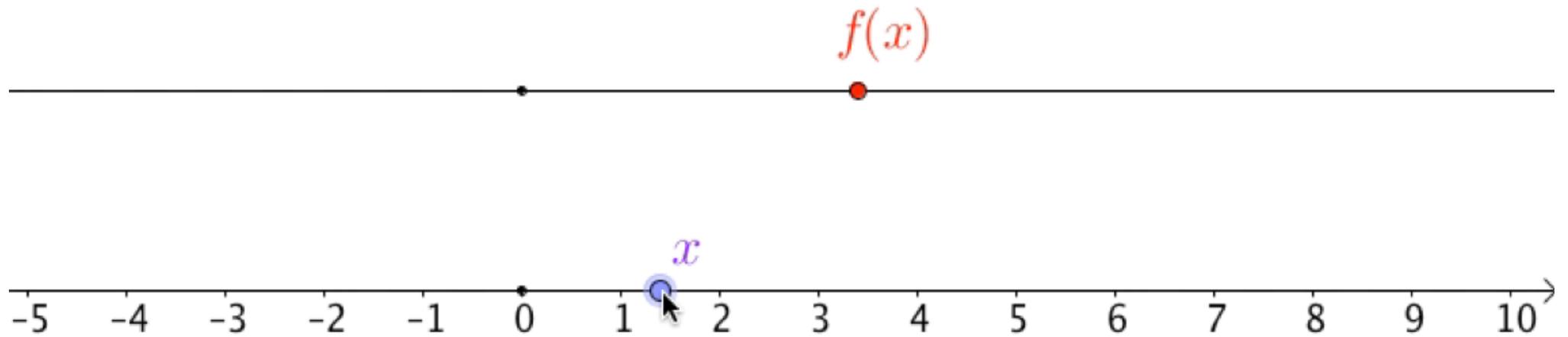


13

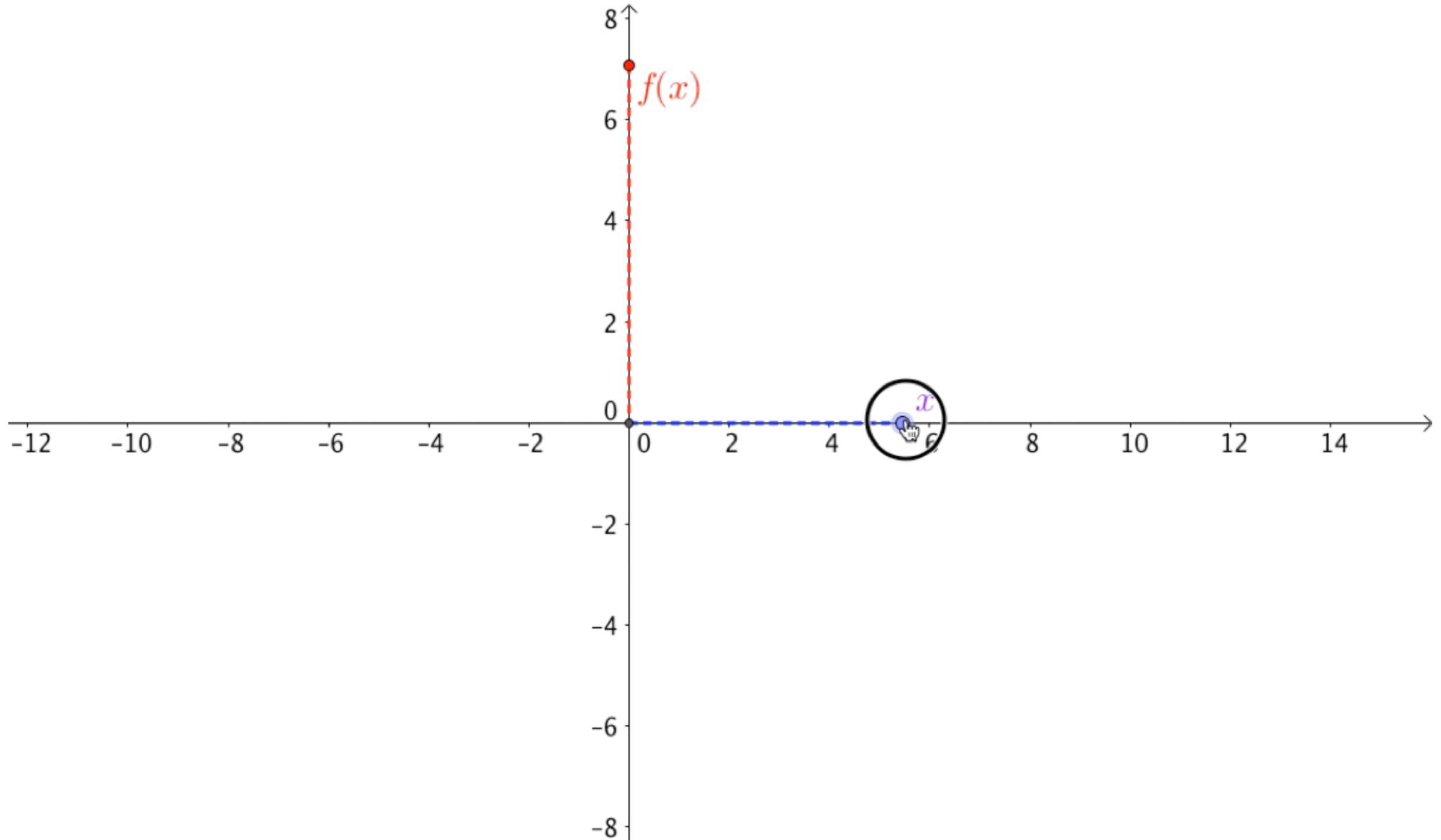
Un percorso che fa uso di
rappresentazioni
visuo-spaziali dinamiche per
affrontare il concetto di funzione



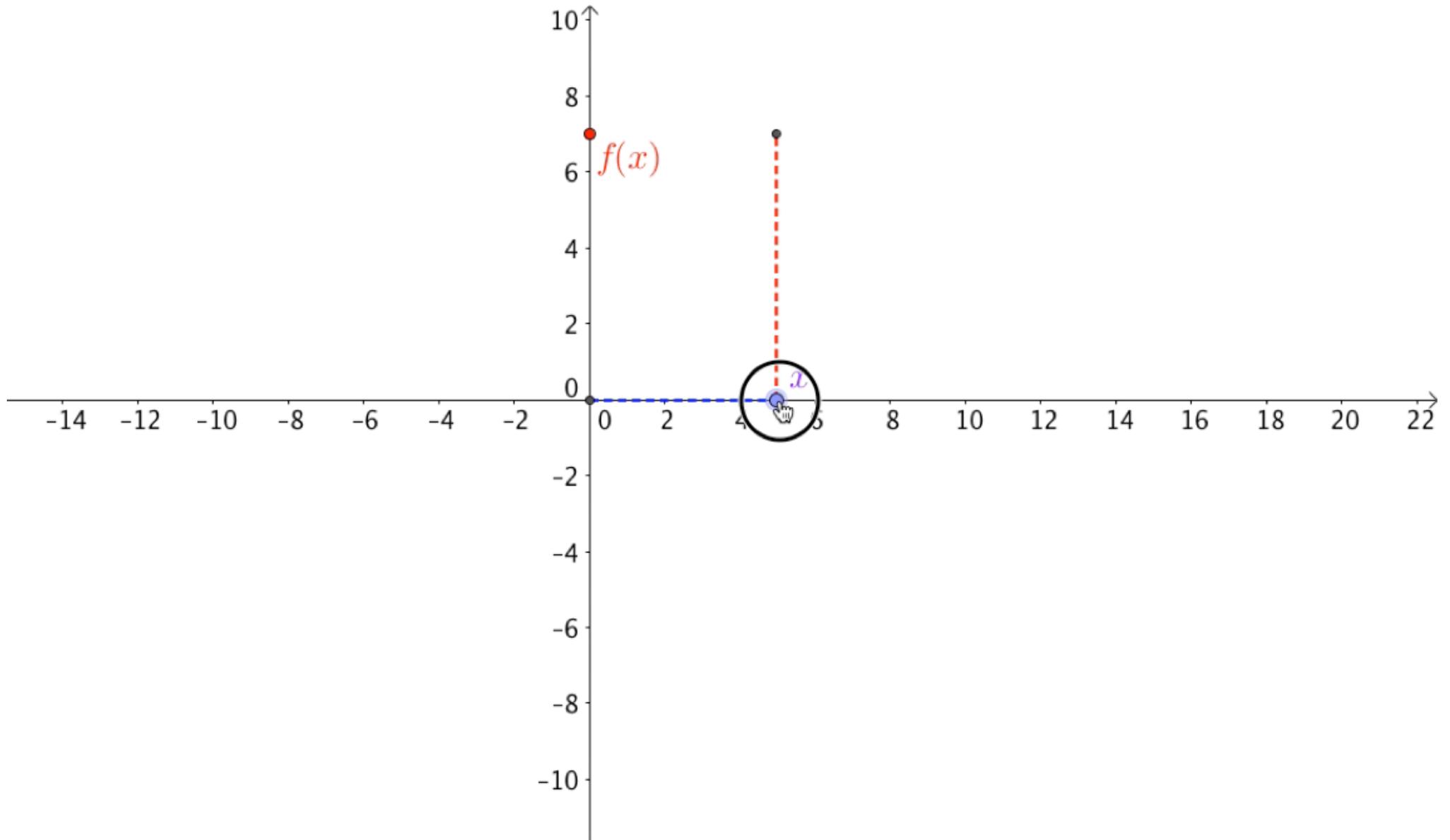
Dominio e codominio paralleli



Dominio e codominio perpendicolari – nascita del grafico



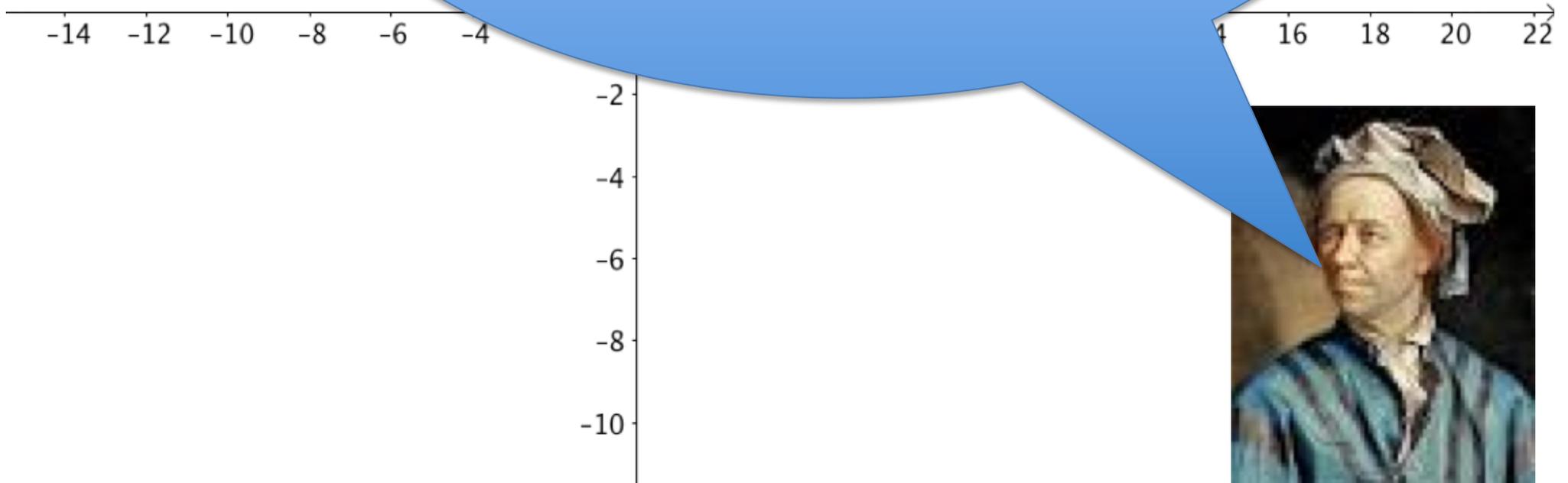
Dominio e codominio perpendicolari – nascita del grafico



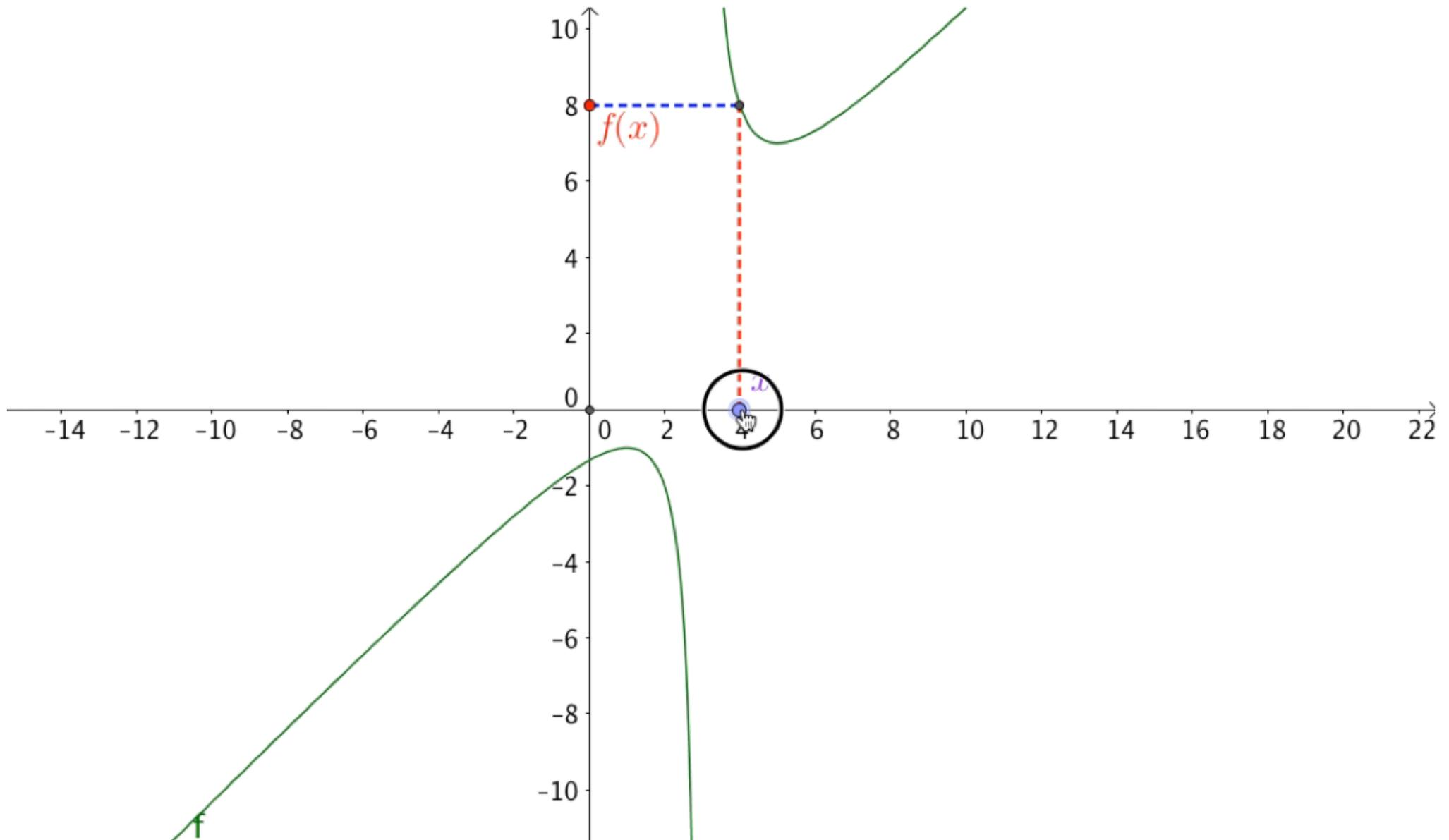
Dominio e codominio delle funzioni lineari – nascita del

“Se delle quantità dipendono da altre in modo che dalle mutazioni di queste dipendono anche le prime (cioè subiscono delle variazioni), esse si usano chiamare funzioni di queste. Questa denominazione è molto ampia e comprende in sé tutti i modi coi quali una quantità si può determinare per mezzo di altre”.

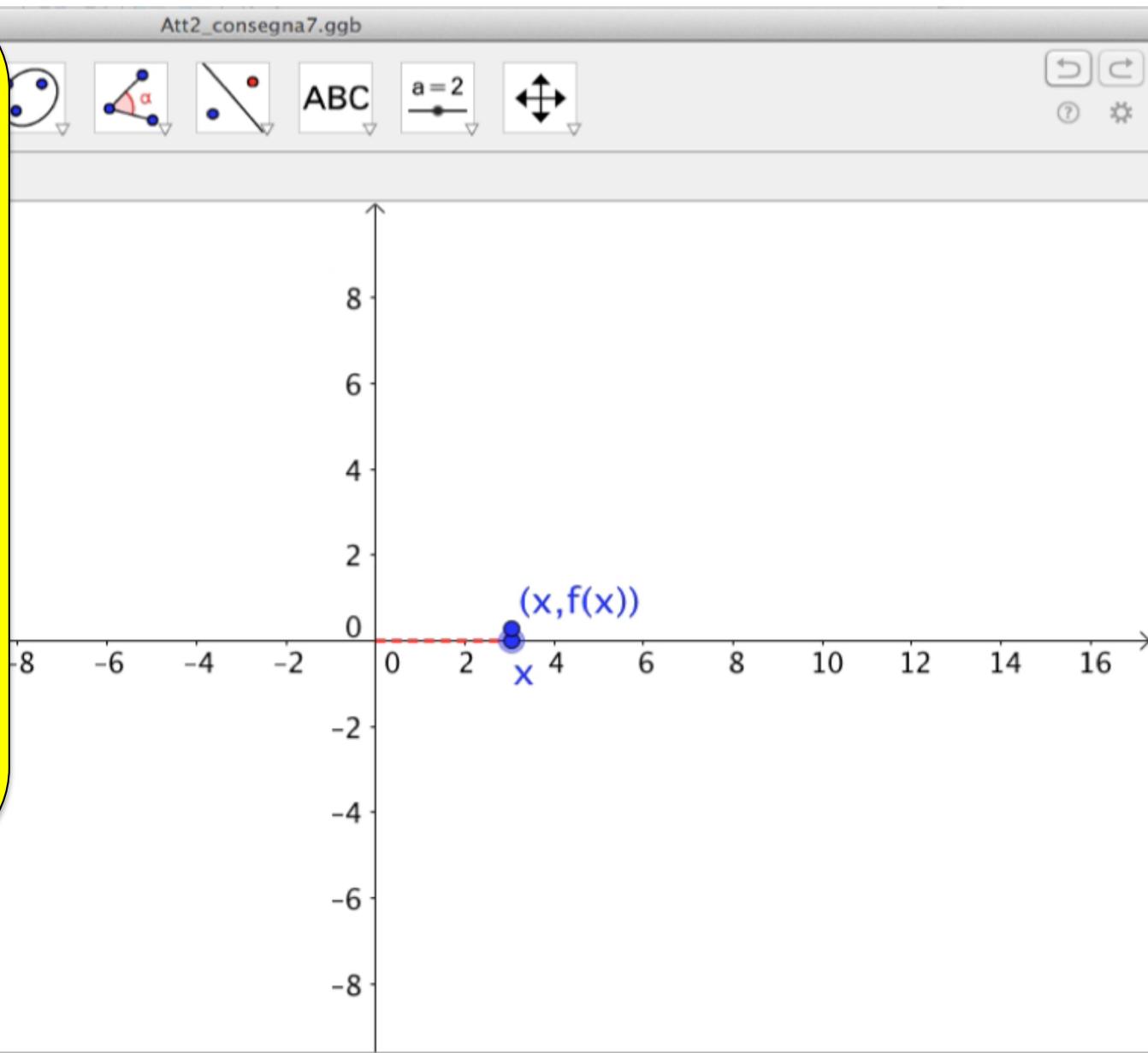
Eulero, 1755



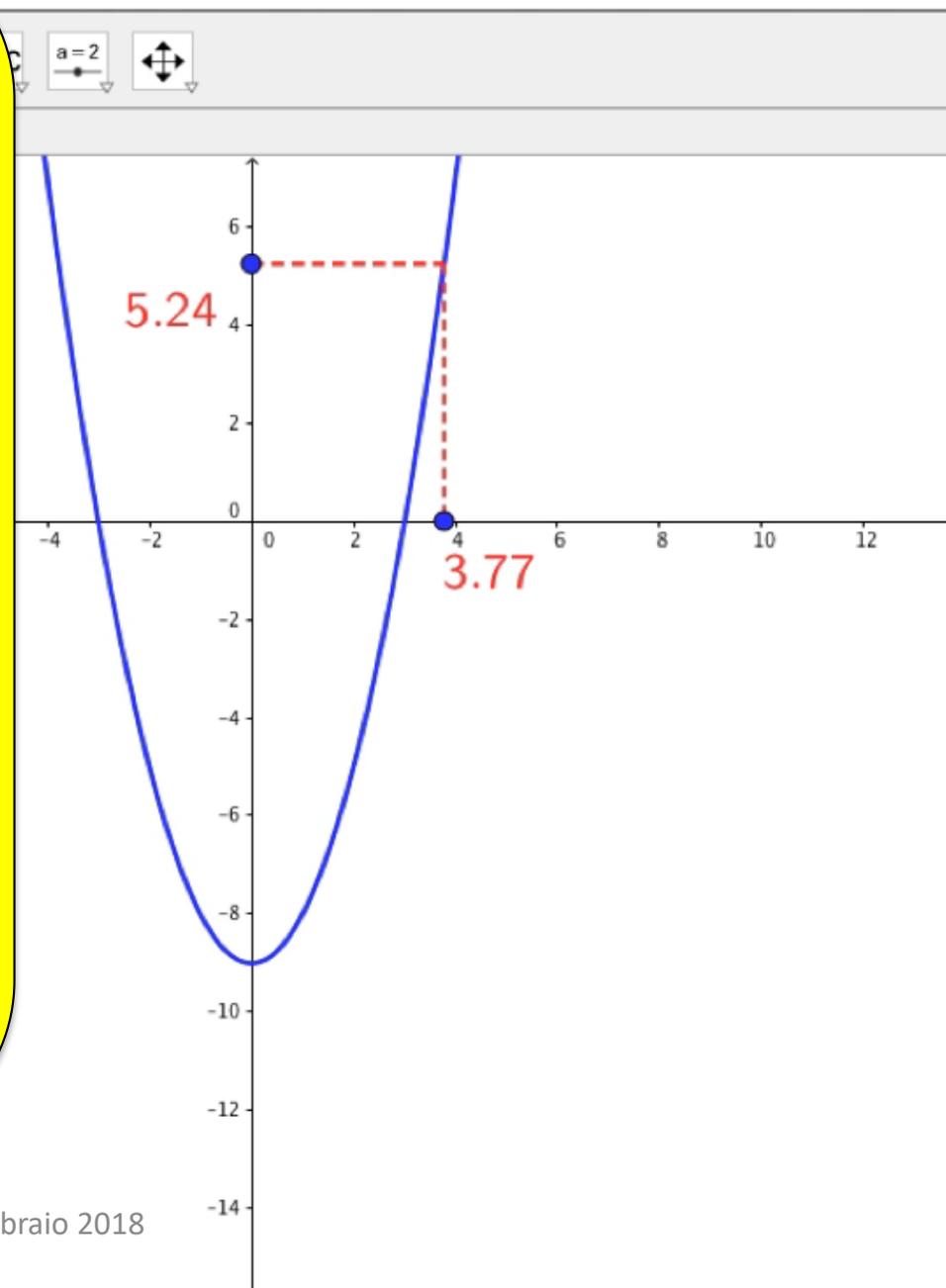
Dominio e codominio perpendicolari – grafico come oggetto geometrico (statico)



- a) Che cosa puoi muovere? In che modo?
- b) Descrivi il movimento reciproco dei due punti.
- c) Crea una tabella input (x)/output (f(x)) corrispondente alla relazione rappresentata tra x e f(x).
- d) Come potresti esprimere in forma algebrica la relazione tra x e f(x)?

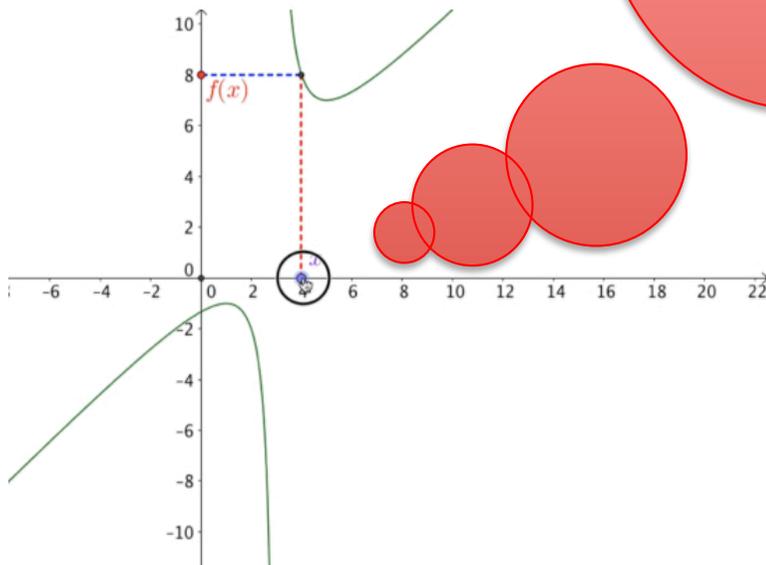


- a) Che cosa puoi muovere? In che modo?
- b) Quale punto etichetteresti "x" e quale "f(x)"? Perché?
- c) Come potresti esprimere in forma algebrica la relazione tra x e f(x)?
- d) Si può ottenere $f(x)=16$? In che modo?
- e) È possibile spostare $f(x)$ sul semiasse delle y negative? Se sì, quali valori può assumere? Se no, spiegare perché.
- f) Confronta questo file con il file [...] (rappresentazione con assi paralleli), descrivendo somiglianze e differenze.



Concetto di funzione

- covariazione delle variabili
- variabile indipendente e dipendente
- grafico
- tabella
- massimo/minimo relativo
- asintoto
- positività



Il caso di Gallo

Gallo frequenta il terzo anno di un Istituto Statale di Istruzione Superiore.

In prima e seconda ha partecipato pochissimo alla lezione di matematica; non ha sviluppato competenze nell'uso di strumenti algebrici.

In terza il professore decide di introdurre il concetto di funzione tramite una sequenza di 14 lezioni che fanno uso di file dinamici appositamente progettati.

Caratteristiche del discorso di Gallo

Vocabolario e sintassi

Lo studente assegna nomi non matematici ad oggetti che avrebbero un nome matematico (specializzato).

Questi termini diventano parte di un linguaggio “situato” profondamente legato all’uso del software.

Caratteristiche del discorso di Gallo

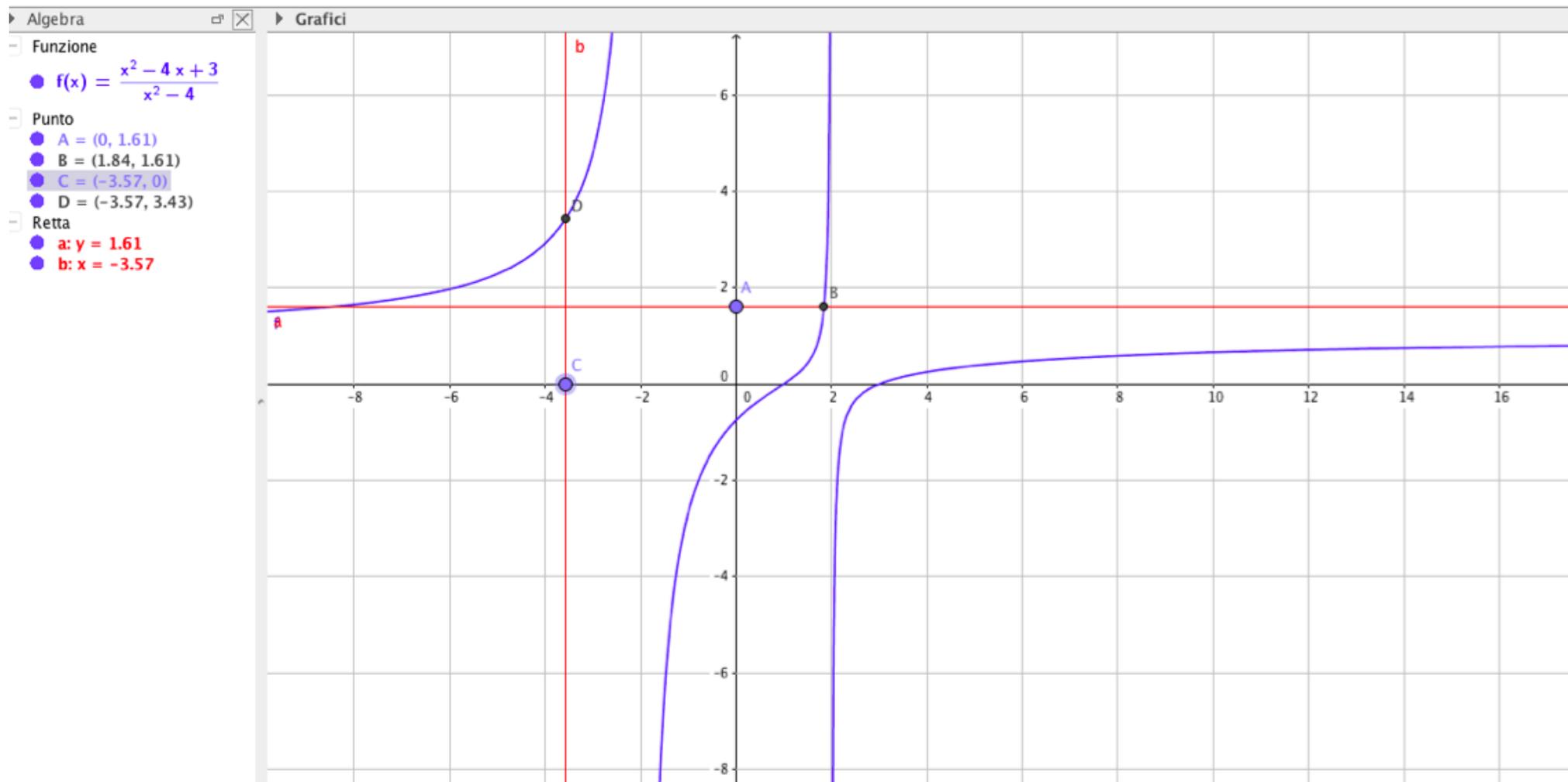
Uso di mediatori visivi prodotti con il software

Esempio:

Gallo è stato chiamato alla lavagna a svolgere uno studio di funzione.

Lo studente aveva a disposizione il grafico della funzione su Geogebra, dove erano stati precedentemente costruiti dal docente i seguenti mediatori visivi:

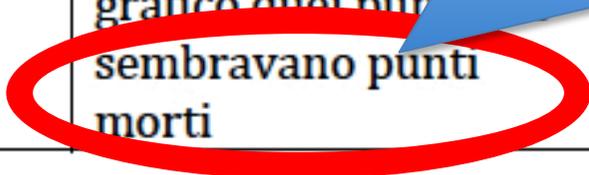
- una retta mobile parallela all'asse delle ordinate,
- una parallela all'asse delle ascisse
- i loro punti di intersezione con la funzione.



Per prima cosa Gallo trova correttamente il dominio della funzione, svolgendo la consegna tramite manipolazioni sul grafico e senza utilizzare alcun procedimento algebrico.

38.	[01:05]	Prof.	Come li hai trovati quindi? Cosa hai mosso? Dove ti sei spostato?	Si riferisce agli intervalli indicati nel dominio	
39.	[01:08]	Nic	Ho mosso la verticale		
40.	[01:17]	Prof.	Andando a cosa?		
41.	[01:19]	Nic	Andando a vedere grafico quei punti sembravano punti morti		1.d): punti morti 3.d): andando a vedere 3.i)

in termini matematici specializzati diremmo: "punti che non appartengono al dominio"



Caratteristiche del discorso di Gallo

Gallo sviluppa procedure manipolando i mediatori visivi costruiti per rispondere a richieste quali:

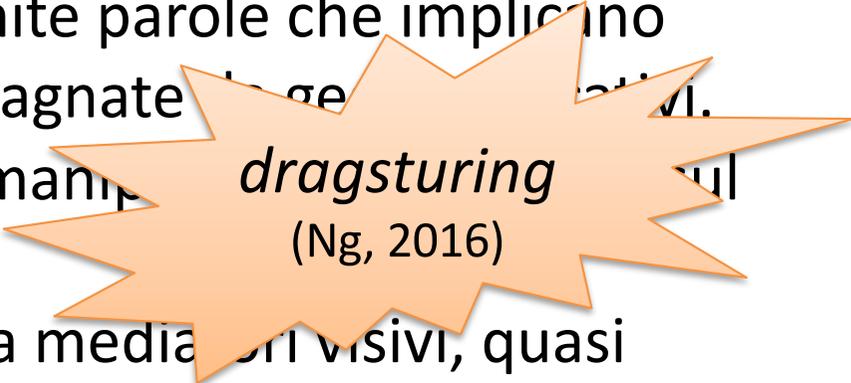
- Trova il dominio di una funzione
- Trova l'insieme delle immagini di una funzione
- Determina la positività di una funzione
- La funzione è iniettiva?

Esempio:

È riportato un estratto del compito in classe di Gallo anche nel compito in classe. Nel secondo esercizio si richiedeva di trovare il dominio di alcune funzioni spiegando il procedimento adoperato. Gli studenti avevano a disposizione Geogebra.

a) Per fare questo esercizio, mi aiuto col grafico, all'inizio scrivo le funzioni e le rappresento. Successivamente inserisco una retta perpendicolare all'asse delle x che ha un punto di intersezione con la funzione (in questo caso una parabola). Muovendo la retta da destra a sinistra, scopro che il punto incontra SEMPRE ~~la~~ la funzione

Caratteristiche del discorso di Gallo

- Gallo «conia» dei termini che potrebbero essere sostituiti con termini matematici specializzati (li usa coerentemente rispetto a come certi termini specializzati vengono utilizzati in matematica).
- È vasta la presenza di mediatori visivi, la maggior parte dei quali prodotti dallo studente stesso: gli aspetti dinamici di tali mediatori sono incorporati nel discorso tramite parole che implicano movimento, in gran parte accompagnate da gesti. 
- La maggioranza dei «gesti» sono manipolazioni sul software.
- Sono presenti molte transizioni tra mediatori visivi, quasi interamente prodotte dallo studente stesso.
- Le procedure risolutive proposte dallo studente. Sono per lo più differenti da quelle standard, ossia non algebriche.

Caratteristiche del discorso di Gallo

- Gallo «
tern
cor
»
- Per comunicare e pensare a Gallo è stato consentito usare rappresentazioni
 - visive (non-verbali)
 - cinestetiche/aptiche
- che *mediavano il concetto di funzione*.
- Sono p
interamente p
stesso.
- Le procedure risolutive proposte dallo studente. Sono le più differenti da quelle standard, ossia non algebriche.

Caratteristiche del discorso di Gallo

- Gallo “conia” dei termini che potrebbero essere sostituiti con termini matematici specializzati (ad esempio, rispetto a come certi termini sono usati in logica).
- È vasta la presenza di prodotti dalle forme che sono incommensurabili con i movimenti.
- La maggioranza del software.
- Sono presenti interamente prodotti.
- Le procedure risolutive proposte sono per lo più differenti da quelle standard, ossia non algebriche.

Fino a che punto
possiamo dire che
Gallo stava “facendo
algebra” ?

Caratteristiche del discorso di Gallo

- Gallo “conia” dei termini che potrà liberare i suoi discorsi con termini matematici spinti fino a un punto (ad esempio, il concetto di come certi termini sono usati in geometria).
- È vasta la presenza di concetti geometrici prodotti dallo studio di problemi che sono incorporati in un software di movimento, come il movimento di un punto in un piano.
- La maggioranza dei concetti sono presentati in un software.
- Sono presenti concetti geometrici interamente prodotti dal software.
- Le procedure di risoluzione sono per lo più diverse da quelle standard, ossia geometriche.

Gallo è in grado di tradurre tutte queste relazioni geometriche tra oggetti nel piano in relazioni generali tra numeri?

In conclusione...

Abbiamo visto come diverse rappresentazioni visuo-spaziali (anche dinamiche) possono

- essere proposte didatticamente ed essere stimolanti per tutta la classe
- favorire ragionamenti in aritmetica e in algebra,
- e consentire a studenti (che prima venivano esclusi) di partecipare al “discorso matematico”.